Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение Ростовской области «Таганрогский педагогический лицей – интернат»

ПРОЕКТНАЯ РАБОТА

Тема: «ПОСЛЕДНИЕ ЦИФРЫ СТЕПЕНЕЙ»

Автор работы:

Кобринец Диана, 10 «Б» класс

Научный руководитель:

Похилая Олеся Павловна,

учитель математики

г.Таганрог

2022

Содержание

[Введение 3](#_Toc64654826)

[Степень числа. Последняя цифра степени. 4](#_Toc64654827)

[Закономерности изменения последней цифры степени натурального числа 4](#_Toc64654828)

[Алгоритм нахождения последней цифры степени по остатку от деления ее показателя на 4 5](#_Toc64654829)

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

[1.Применение алгоритма нахождения последней цифры степени натурального числа 6](#_Toc64654830)

[Заключение 7](#_Toc64654831)

[Список литературы 7](#_Toc64654832)

# Введение

 *«Математику уже затем учить следует,*

*что она ум в порядок приводит»*

*М. В. Ломоносов*

**Актуальность**

Эти слова раскрывают сущность предмета математика, так как именно она, прежде всего, учит нас мыслить, рассуждать, анализировать, делать выводы, умозаключения и подводить итоги. Математика является одним из основных школьных предметов, потому, что все перечисленные качества необходимы не только математику, но и представителю любой другой науки. Существуют специальные задачи, которые направлены на формирование этих умений.

Участвуя в математической игре «Кенгуру», мы неоднократно сталкивались с заданием на нахождение последней цифры, например, суммы 19811989+ 19821989+ 19831989+ 19841989+19851989+…+ 19891989. Продумывая ход решений, нас не покидала мысль, есть ли и каков он рациональный способ вычисления.

При решении этой задачи возник вопрос, а какой будет последняя цифра любого натурального числа в любой степени и есть ли какая-нибудь закономерность в том, как меняется последняя цифра степени натурального числа? Мы решили узнать, сводится ли решение данной задачи к выявлению закономерности, к алгоритму нахождения последней цифры степени натурального числа.

**Цель**

Составить опорную таблицу «Последние цифры степени», найти закономерности в них, научиться вычислять последние цифры степеней.

**Задачи**

* изучить и отобрать материал по данной теме;
* построить таблицу последних цифр различных степеней;
* выявить закономерность изменения последней цифры степени натурального числа;
* применить данные закономерности при решении задач;
* проанализировать и систематизировать полученную информацию.

Актуальность темы проекта обусловлена необходимостью поиска быстрых алгоритмов решения практически важных задач, отработки навыков устного счета.

**Методы проектирования**

* аналогии;
* ассоциативный.

 **Материалы проектирования**

# Степень числа. Последняя цифра степени

Вспомним для начала, что такое степень числа. Произведение $n$ множителей, каждый из которых равен $a$, обозначают $a^{n}$:

$a^{n}=a•a•a•…•a$, $a^{1}=a$.

Выражение $a^{n}$ называется *степенью*, $a$ – *основанием* степени, $n$ – *показателем* степени.

Выясним, есть ли какая-нибудь закономерность в том, как меняется последняя цифра числа $2^{n}$, где *n*– натуральное число, с изменением показателя *n*. Для этого рассмотрим таблицу:

Таблица 1. Таблица степеней

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 21= 225 = 3229 = 512 | 22 = 426= 64210 = 1024 | 23= 827= 128211 = 2048 | 24 = 1628= 256212 = 4096 |

 Из таблицы видно, что через каждые четыре шага последняя цифра повторяется. Заметив это, нетрудно определить последнюю цифру степени $2^{n}$ для любого показателя *n*.

В самом деле, возьмем число 2100. Если бы мы продолжили таблицу, то оно попало бы в столбец, где находятся степени 24, 28, 212, показатели которых кратны четырем. Значит, число 2100, как и эти степени, оканчивается цифрой 6.

Возьмём к примеру, 222, если проверить, просто посчитав, используя калькулятор, то получится 4194304 – последняя цифра 4.

Теперь попробуем пользоваться таблицей, но в таблице 4 числа, а показатель степени 22, однако, после последнего числа этот «круг» начинается заново. Поэтому, показатель степени 22 делим на 4, получаем число 5 и остаток 2, то есть проделываем 5 «кругов», и отсчитываем ещё 2 в перед, а второе число – это 4, замечаем, что таблица «работает».

#

# Закономерности изменения последней цифры степени натурального числа

Заполним таблицу, где в первой строке написаны цифры, которыми оканчиваются записи натуральных чисел. Во - второй строке - цифры, которыми оканчиваются соответствующие квадраты, в третьей – кубы и т.д.

Таблица 2. Последние цифры степеней

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$n$$ | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***8*** | ***9*** | ***0*** |
| $$n^{2}$$ | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 | 0 |
| $$n^{3}$$ | 1 | 8 | 7 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 9 | 0 |
| $$n^{4}$$ | 1 | 6 | 1 | 6 | 5 | 6 | 1 | 6 | 1 | 0 |
| $$n^{5}$$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| $$n^{6}$$ | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 | 0 |

Исходя из заполненной таблицы, пятая степень числа оканчивается той же цифрой, что и первая степень числа; шестая степень числа оканчивается той же цифрой, что и вторая степень этого числа; седьмая степень – что и третья степень этого числа. Результаты в таблице повторяются через каждые четыре строки.

После заполнения таблицы пришли к следующим закономерностям изменения последней цифры степени натурального числа:

* квадрат натурального числа может оканчиваться любой цифрой;
* куб натурального числа может оканчиваться любой цифрой;
* четвертая степень натурального числа может оканчиваться одной из цифр: 0, 1, 5, 6;
* пятая степень натурального числа оканчивается той же цифрой, что и само число;
* если запись натурального числа оканчивается на 1, на 5, на 6, то любая степень этого числа оканчивается соответственно на 1, на 5, на 6;
* нечётные степени числа 4 оканчиваются цифрой 4, а чётные - цифрой

#

# Алгоритм нахождения последней цифры степени по остатку от деления ее показателя на 4

Исходя из закономерностей изменения последней цифры степени натурального числа, возникает вопрос, а нельзя ли найти способ определения последней цифры степени по остатку от деления ее показателя на 4.

Найдём последнюю цифру степеней , где показатели степеней делятся на 4 нацело.

Таблица 3. Последние цифры степеней, показатель которых кратен числу 4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 531441 | 12:4=3(остаток 0) | 1 |
|  | 84934656 | 4:4=1(остаток 0) | 6 |
|  | 4294167296 | 16:4=4(остаток 0) | 6 |
|  | 130321 | 4:4=1(остаток 0) | 1 |
|  | 152387890625 | 8:4=2(остаток 0) | 5 |

Вывод: если остаток равен 0, то для всех нечётных оснований, кроме чисел, оканчивающихся на 5, искомая цифра равна 1, а для чётных, искомая цифра равна 6.

Найдем последнюю цифру степеней , где показатели степеней делятся на 4 с остатком, равным 1.

Таблица 4. . Последние цифры степеней, показатель которых делится на число 4 с остатком

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 5153632 | 5:4=1(остаток 1) | 2 |
|  | 10604499373 | 9:4=2(остаток 1) | 3 |
|  | 87089010407 | 13:4=3(остаток 1) | 7 |

Вывод: если остаток равен 1, то последняя цифра будет равна последней цифре основания степени.

Найдём последнюю цифру степеней , где показатели степени делятся на 4 с остатком, равным 2.

Таблица 5. . Последние цифры степеней, показатель которых делится на число 4 с остатком 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 16777216 | 6:4=1(остаток 2) | 6 |
|  | 609623072849 | 14:4=3(остаток 2) | 9 |
|  | 85766121 | 10:4=2(остаток 2) | 1 |

Вывод**:** если остаток равен 2, то последняя цифра будет равна квадрату последней цифре в записи основания степени.

Найдём последнюю цифру степеней 

Таблица 6. Последние цифры степеней

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 62748517 | 7:4=1(остаток 3) | 7 |
|  | 31381059609 | 11:4=2(остаток 3) | 9 |

Вывод:если остаток равен 3, то последняя цифра будет равна кубу последней цифре в записи основания степени.

Алгоритм нахождения последней цифры степени натурального числа

Чтобы найти последнюю цифру степени натурального числа с натуральным показателем, нужно найти остаток от деления показателя степени на 4. Если остаток равен:

а) 1, то искомая цифра будет совпадать с последней цифрой основания степени;

б) 2, то искомая цифра будет равна последней цифре в записи квадрата основания;

в) 3, то искомая цифра будет равна последней цифре в записи куба основания;

г) 0, то для всех нечётных оснований, кроме чисел, оканчивающихся на 5, искомая цифра равна 1, а для чётных, кроме круглых чисел, искомая цифра равна 6.

Основная часть

# 1.Применение алгоритма нахождения последней цифры степени натурального числа

Одной из задач данной работы является научиться решать задачи на основе свойств и закономерностей нахождения последней цифры степени натурального числа. Из алгоритма, приведенного в предыдущей главе работы, следует, что для нахождения последней цифры степени с натуральным показателем необходимо найти остаток от деления показателя данной степени на 4, далее по представленными выше этапами. Применим данный алгоритм на практике.

**№1.** Найти последнюю цифру числа $2^{187}$.

*Решение:* 187:4=46 (остаток 3)

Следовательно, последняя цифра равна кубу последней цифре в записи основания степени, то есть 2³=8.

**№2.** Какой цифрой оканчивается число ?

*Решение:* 11:4=3 (остаток 3).

Следовательно, последняя цифра числа  - 1.

12:4=3 (остаток 0).

Значит, последняя цифра числа  - 6.

13:4=3 (остаток 1).

Следовательно, последняя цифра числа  - 3.

Получаем, 1+6+3=10. Итак, последняя цифра числа 0.

**№3.** Доказать, что число  не делится нацело на 15.

*Решение:*так как 15=5·3, то данное число  должно делиться на 5 и на 3. Выясним, делится ли оно на 5. Для этого, число должно оканчиваться цифрой 5 или 0.

2016:4=504 (остаток 0).

Тогда,  оканчивается цифрой 1,  оканчивается цифрой 6,  оканчивается цифрой 5. Получаем 1+6+5=12. Следовательно, число  оканчивается цифрой 2, а значит, оно не делится на 15.

При решении задач использовалась опорная таблица «Последние цифры степени», особенности изменения последних цифр степени и их закономерности.

Нахождение закономерности изменения последних трёх и более последних цифр чисел, взятых в степень - нецелесообразно, так как период повторения будет намного больше, и использование этих данных будет очень редким.

**Практическая значимость**

 Полученные результаты работы могут быть использованы для подготовки к олимпиадам по математике, при решении задач, а также при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ по математике.

# Заключение

Для достижения цели проектной работы были разработаны следующие части: теоретическая, практическая и анализ полученных результатов.

В ходе работы были выявлены закономерности изменения последней цифры степени натурального числа, а также были применены данные закономерности при решении задач. При применении выявленного алгоритма, закономерностей возникают расширенные возможности для решения алгебраических задач.

Данная работа будет полезна как для проведения факультативных занятий по математики для более глубокого изучения алгебры, а также для подготовки к олимпиадам по математике.

#  Список литературы

1. Заболотнева, Н. В. «Задачи для подготовки к олимпиадам. Математика 5-8 классы» – Волгоград: Учитель, 2007. — с. 99.
2. Фарков, А. В. Математические олимпиады 5-11 кл. Методика подготовки, Москва, 2016. — с. 31.
3. ЦТТ «Кенгуру плюс» 1995–2021. Кенгуру. Математика для всех. [Электронный ресурс] URL: <https://mathkang.ru/>. Дата обращения: 22.01.2021г.
4. Чулков, П. В. Математика. Школьные олимпиады: методическое пособие. 5- кл./ П.В. Чулков.- М.: Издательство НЦ ЭНАС, 2007. — с. 88.
5. Шуба, М. Ю. Занимательные задачи в обучении математике: Книга для учителя. – 2-е изд.-М.: Просвещение, 2005. — с. 22.